

Bài tập Toán rời rạc và Lý thuyết đồ thị

Chương 1: Logic mệnh đề

Bài 1 Chứng minh các tương đương logic sau đây:

- $p \rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow q$
- $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
- $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $p \vee q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- $p \rightarrow q \wedge r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
- $p \rightarrow q \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

Bài 2 Chứng minh các mệnh đề sau đây là các hằng đúng.

- $p \wedge q \rightarrow p \vee q$
- $(p \vee q \rightarrow r) \wedge p \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Bài 3 Chứng minh các mệnh đề sau (bằng cách sử dụng các qui tắc suy luận).

- $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg r \rightarrow \neg(p \vee r)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q) \wedge r \rightarrow \neg p$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge p \rightarrow r$
- $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r \wedge q) \wedge (r \rightarrow s \vee t) \wedge \neg s \rightarrow t$
- $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \vee s) \wedge (t \rightarrow q) \wedge \neg s \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg t))$

Bài 4 Xem suy luận sau: “Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương. Nếu được tăng lương thì An sẽ mua xe mới. An không mua xe mới. Vì vậy, An không được lên chức hoặc An không làm việc nhiều”

- Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.
- Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Bài 5 Xem suy luận sau: “Nếu Bình đi học về muộn thì mẹ anh ta sẽ buồn. Nếu An thường xuyên vắng nhà thì cha anh ta sẽ giận. Nếu mẹ Bình buồn hoặc cha An giận thì cô Hà, bạn họ, sẽ nhận được lời than phiền. Mà Hà không nhận được lời than phiền. Vì vậy, Bình đi học về sớm và An ít khi vắng nhà”.

- Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.
- Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Chương 2: Phương pháp đếm

Bài 1 Trong một đám cưới có 10 người kể cả cô dâu và chú rể. Để chụp ảnh người ta xếp 6 người thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để chụp ảnh nếu

- Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu.
- Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu và chú rể.
- Chỉ có hoặc là cô dâu hoặc là chú rể xuất hiện trong mọi kiểu ảnh.

Bài 2 Tìm số tập con của tập S có n phần tử.

Bài 3 Xét tập $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. Có bao nhiêu tập con A của S thỏa:

- $|A| = 5$
- $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của A là 3.
- $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của A bé hơn hay bằng 3.

Bài 4 Xét các tập hợp $A = \{1, 2, \dots, 11\}$ và $B = \{1, 2, \dots, 12\}$.

- Có bao nhiêu tập con của A chứa ít nhất một số chẵn.
- Có bao nhiêu tập con của B chứa ít nhất một số chẵn.
- Tổng quát hóa các kết quả trong câu a và b

Bài 5 Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$.

- Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm.
- Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_1 \geq 2$.
- Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_i \geq 2$, với $i=1, \dots, 5$.
- Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_1 < 2$.

Bài 6 Một tổ của một lớp học có 7 sinh viên

- Có bao nhiêu cách chia họ thành 2 nhóm?. Nếu yêu cầu mỗi nhóm có ít nhất 2 sinh viên thì có bao nhiêu cách chia?
- Tổng quát hóa các kết quả trả lời của câu trên khi số sinh viên trong tổ là một số n tùy ý.

Bài 7 Có bao nhiêu cách chia 10 hòn bi cho 5 đứa trẻ trong các trường hợp sau:

- Không có hạn chế nào cả.
- Đứa trẻ lớn nhất được ít nhất 2 hòn bi.
- Mỗi đứa trẻ được ít nhất một hòn bi.

Bài 8 Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên được hưởng các loại học bổng này để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.

Bài 9 Giả sử n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong mọi tập n số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho n .

Chương 3: Quan hệ

Bài 1 Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c\}$ và $Y = \{b, c, d, e\}$

- Tính $|X \times Y|$
- Tính số quan hệ hai ngôi trên Y
- Tính số quan hệ từ X đến Y chứa (b, c) và (b, d) .
- Hãy tìm một quan hệ trên X có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.
- Hãy tìm một quan hệ trên Y có tính phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.

Bài 2 Chứng minh các quan hệ sau đây là tương đương

- Quan hệ R trên Z sao cho $xRy \Leftrightarrow x+y$ chẵn, tìm lớp tương đương của 1.
- Quan hệ ϕ trên tập số thực R sao cho $x\phi y \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$. Tìm lớp tương đương của π .

Bài 3 Trên tập $U_n = \{a \in \mathbb{N} \text{ và } a|n\}$, n là số tự nhiên cho trước, ta định nghĩa quan hệ

$$x R y \Leftrightarrow x|y,$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên U_n .

Bài 4 Xét quan hệ R trên $Z \times Z$ như sau:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ và } b \leq d$$

- Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $Z \times Z$.
- Tìm min, max, inf, sup của tập hợp $A = \{(7, 2), (5, 4), (6, 6), (8, 3)\}$.

Bài 5 Giả sử $\mathbb{N}^+$ là tập hợp các số tự nhiên khác 0. Xét quan hệ R trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ như sau:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ và } b|d \text{ (b là ước số của d)}$$

- Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- Tìm min, max, inf, sup của tập hợp $A = \{(3, 2), (5, 4), (6, 6), (8, 10)\}$

Bài 6 Xét tập các tập con $\wp(E)$ của tập E và quan hệ R trên $\wp(E)$ như sau:

$$\forall A, B \in \wp(E), A R B \Leftrightarrow A \subset B$$

- Chứng minh R là một quan hệ thứ tự trên $\wp(E)$.
- Với $E = \{1, 2, 3\}$, hãy tìm max, min, sup, inf của $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

Chương 4: Khái niệm và tính chất đồ thị

Bài 1 Tìm số đỉnh của một đồ thị vô hướng G trong các trường hợp sau.

- Nếu biết G có 12 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc 2.
- Nếu biết G có 15 cạnh, 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại đều có bậc 3.

Bài 2 Cho một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh có bậc lớn hơn hoặc bằng 3. Đồ thị này có tối đa bao nhiêu đỉnh.

Bài 3 Biết rằng mọi đỉnh của G đều có bậc bằng số lẻ p . Chứng minh số cạnh của G là một bội số của p .

Bài 4 Cho một đơn đồ thị G có số đỉnh $n \geq 3$. Chứng minh G có chứa ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.

Bài 5 Cho đồ thị vô hướng có đúng 2 đỉnh bậc lẻ. Chứng minh có một đường đi giữa 2 đỉnh này.

Bài 6 Giả sử G là đơn đồ thị vô hướng có n đỉnh ($n \geq 3$). Chứng minh rằng G liên thông nếu $\deg(v) \geq n/2$, với mọi v thuộc G .

Bài 7 Gọi G là đồ thị có n đỉnh và m cạnh, D là bậc lớn nhất các đỉnh của G . Chứng minh rằng $2m/n \leq D$.

Bài 8 Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị hai phía có n đỉnh và m cạnh thì $m \leq n^2/4$.

Bài 9 Cho G là đồ thị vô hướng liên thông, m cạnh, n đỉnh. Chứng minh $m \geq n-1$.

Bài 10 Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị luôn luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ đến một đỉnh bậc lẻ khác.

Bài 11 Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 6 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 4. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Bài 12 Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 30 cạnh. Nếu biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành 20 miền, thì đồ thị này có bao nhiêu đỉnh?

Chương 5: Cây khung của đồ thị

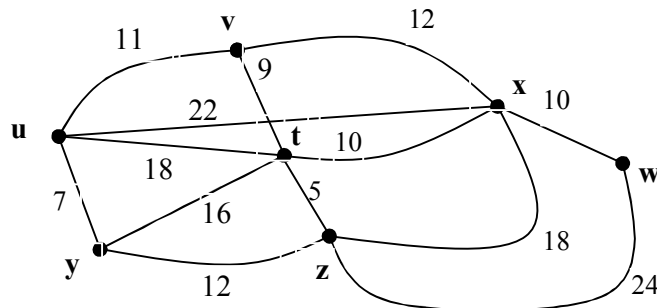
Bài 1 Cho đồ thị vô hướng liên thông $G=(V,E)$. Gọi $e=(u,v) \in E$ là cạnh có trọng số bé nhất trong G . C/m có một cây bao trùm bé nhất chứa e .

Bài 2 Cho G là đồ thị vô hướng có số cạnh bằng số đỉnh. Chứng minh G có ít nhất một chu trình.

Bài 3 Viết thuật toán Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị vô hướng liên thông có trọng số.

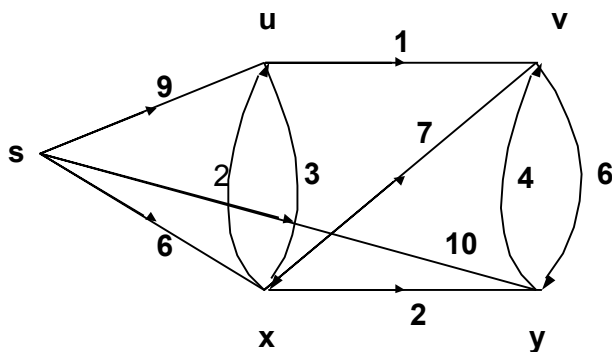
Bài 4 Viết thuật toán Prim (bắt đầu từ đỉnh s) để tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị vô hướng liên thông có trọng số.

Bài 5 Biểu diễn các bước thực thi thuật toán Kruskal và Prim (bắt đầu từ đỉnh v) để tìm cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị sau.

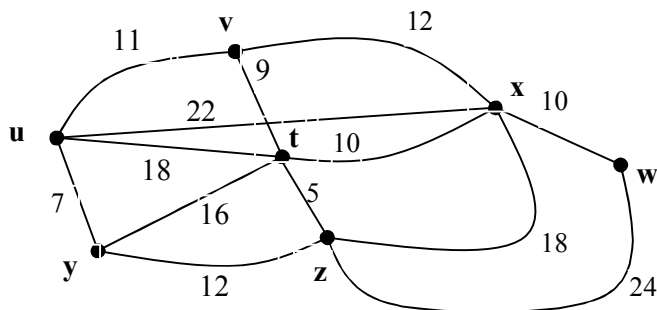


Chương 6: Đường đi ngắn nhất

Bài 1 Viết thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh còn lại của đồ thị G . Biểu diễn (minh họa) quá trình tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến các đỉnh còn lại của G . Trong mỗi bước hãy chỉ ra các giá trị S , d , π và cây đường đi ngắn nhất. Cho biết đường đi và độ dài của đường đi ngắn nhất từ s đến v .



Bài 2 Biểu diễn quá trình thực thi của giải thuật Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x các đỉnh còn lại của đồ thị G dưới đây. Cho biết đường đi và độ dài của đường đi ngắn nhất từ x đến y .



Bài 3 Viết thuật toán Floyd-Warshall để tìm đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh của một đồ thị $G=(V,E)$ có hướng, có trọng số. Với đồ thị G có các đỉnh 1, 2, 3, 4 và ma trận trọng số sau:

$$W = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & -1 \\ 1 & \infty & 2 & \infty \\ -4 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 7 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Hãy sử dụng giải thuật Floyd-Warshall để tìm đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của G và cho biết đường đi ngắn nhất từ đỉnh 4 đến đỉnh 1 và trọng số của đường đi này.